Tentamen Lineaire Algebra

maandag 5 juli 2010 9.00-12.00 uur

Tijdens deze toets mogen boek/diktaat/aantekeningen en een eenvoudige rekenmachine worden geraadpleegd. Het gebruik van een grafische rekenmachine is niet toegestaan.
Alle antwoorden dienen te worden gemotiveerd. Een antwoord zonder berekening zal dus niet worden goed gerekend. Succes !

Vermeld op elke bladzijde je naam, studentnummer en studierichting.

Gratis: $\boxed{10}$

1. Het onderstaande stelsel vergelijkingen hangt af van twee parameters $p, q \in \mathbb{R}$.

$$\begin{aligned} x_1 + 3x_2 + 2x_3 &= 1 \\ x_1 + x_2 + px_3 &= 3 \\ 2x_1 - 2x_2 + x_3 &= q \end{aligned}$$

   (a) $\boxed{5}$ Geef de oplossing(en) van het stelsel voor $p = 1$ en $q = 4$.

   (b) $\boxed{5}$ Voor welke waarde(n) van p is het stelsel uniek oplosbaar?

   (c) $\boxed{5}$ Stel p is zo gekozen dat het stelsel *geen* unieke oplossing heeft. Voor welke waarde(n) van q bestaan er oplossingen?

2. Gegeven zijn de drie vectoren $\mathbf{u_1}$, $\mathbf{u_2}$ en $\mathbf{u_3}$, met $a, b \in \mathbb{R}$

$$\mathbf{u_1} = \begin{pmatrix} 1 \\ 2 \\ -2 \end{pmatrix}, \quad \mathbf{u_2} = \begin{pmatrix} 2 \\ 1 \\ 2 \end{pmatrix}, \quad \mathbf{u_3} = \begin{pmatrix} a \\ 1 \\ b \end{pmatrix}.$$

   (a) $\boxed{5}$ Neem $a = -1$, voor welke waarde(n) van b zijn de vectoren $\mathbf{u_1}$, $\mathbf{u_2}$ en $\mathbf{u_3}$ lineair onafhankelijk?

   (b) $\boxed{5}$ Aan welke relatie moeten a en b voldoen opdat het stelsel vectoren $\mathbf{u_1}$, $\mathbf{u_2}$ en $\mathbf{u_3}$ lineair afhankelijk is?

   (c) $\boxed{5}$ Voor welke waarden van a en b is het stelsel vectoren $\mathbf{u_1}$, $\mathbf{u_2}$ en $\mathbf{u_3}$ orthogonaal?

3. De matrix $\mathbf{A}$, met $a \in \mathbb{R}$, wordt gegeven door (de elementen die niet zijn ingevuld, zijn vanzelfsprekend 0)

$$\mathbf{A} = \left(\begin{array}{cc|ccc} 3 & 2 & & & \\ 8 & 5 & & & \\ \hline & & -2 & 0 & 0 \\ & & 0 & 4 & 9 \\ & & a & 2 & 5 \end{array}\right).$$

   (a) $\boxed{5}$ Bereken de determinant van $\mathbf{A}$.

   (b) $\boxed{5}$ Bepaal de inverse van $\mathbf{A}$ voor $a = 0$.

   (c) $\boxed{5}$ Bepaal de inverse van $\mathbf{A}$ voor $a \in \mathbb{R}$.

Z.O.Z.

4. Gegeven is het discrete dynamische systeem $\mathbf{x_{k+1}} = \mathbf{A}\mathbf{x_k}$, met

$$\mathbf{A} = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ \frac{1}{4} & \frac{3}{4} & 0 \\ 1 & \frac{1}{2} & -\frac{1}{2} \end{pmatrix} \quad \text{en} \quad \mathbf{x_0} = \begin{pmatrix} 2 \\ 7 \\ 2 \end{pmatrix}.$$

(a) $\boxed{3}$ Bereken de eigenwaarden van $\mathbf{A}$.

(b) $\boxed{5}$ Bereken de eigenvectoren van $\mathbf{A}$.

(c) $\boxed{4}$ Geef een uitdrukking voor $\mathbf{x_k}$, met $\mathbf{x_0}$ als gegeven.

(d) $\boxed{3}$ Wat is de toestand voor $k \to \infty$?

5. Het stelsel van differentiaalvergelijkingen $\mathbf{x}' = \mathbf{A}\mathbf{x}$ is bepaald door de matrix $\mathbf{A}$, die afhangt van de parameter $p \in \mathbb{R}$

$$A = \begin{pmatrix} -2 & 3+p \\ -3+p & -2 \end{pmatrix}.$$

(a) $\boxed{6}$ Geef de algemene oplossing $\mathbf{x}(t)$ van de differentiaalvergelijking voor $p = 5$.

(b) $\boxed{3}$ Bereken voor $p = 5$ de oplossing die voldoet aan $\mathbf{x}(0) = (2, 3)$.

(c) $\boxed{6}$ Geef ook de algemene oplossing als $p = 0$.

6. Het vlak V in $\mathbb{R}^3$ door de oorsprong wordt gegeven door de vergelijking

$$2x_1 + x_2 - x_3 = 0.$$

Verder is P een punt in $\mathbb{R}^3$ met coordinaten $(6, -4, 4)$.

(a) $\boxed{5}$ Geef twee lineair onafhankelijke vectoren in het vlak V.

(b) $\boxed{5}$ Bereken de loodrechte projectie van het punt P op het vlak V.

(c) $\boxed{5}$ Bereken de afstand van P tot het vlak V.

Totaal: $\boxed{100}$